V олимпиада школьников по математике «Алые Паруса»
2023/2024 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

5 класс, решения и критерии проверки

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 2.5 часа)

► **5-1.** В жилом доме живут 127 собак. 81 из них гавкают каждый день, а остальные 46 — через день. Сегодня гавкали 97 собак. Сколько собак будут гавкать завтра? Не забудьте обосновать ответ.

✎ **Решение.** 111.

✎ **Решение.** Из 97 собак гавкают каждый день 81 собака. Значит, 16 собак гавкают через день. Сегодня они гавкали, значит, завтра не будут гавкать. И наоборот, оставшиеся 30 собак, гавкающих через день, сегодня не гавкали, значит, будут гавкать завтра. Итого, завтра будут гавкать 111 собак.

Критерии проверки. Только верный ответ (с примером или без примера, как такое могло быть) — 2 балла.

Ошибка в арифметике (то есть если исправить все арифметические ошибка в вычислениях, то получится полностью верное решение) — 4 балла.

► **5-2.** В ток-шоу «Найди машину» имеется 100 закрытых дверей, за которыми суммарно расположены 15 машин (возможно, по несколько машин за одной дверью). На каждой двери написано «За какой-то из остальных дверей есть машина». Известно, что среди надписей точно есть ложные. Ведущий (честно!) подсказывает: «За дверью 34 есть машина!». Можно ли теперь про каждую из дверей выяснить, сколько за ней машин?

✎ **Ответ.** Да, можно.

✎ **Решение.** Заметим, что все надписи, кроме надписи на двери с номером 34 — правдивы (ведь за дверью 34 действительно есть машина). Значит, ложное утверждение именно на двери 34. Значит, за всеми дверьми, кроме 34, нет машин. То есть все 15 машин за дверью 34.

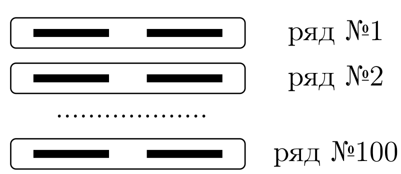
Критерии проверки. Обосновано, что надпись на всех дверях, кроме двери 34, правдивы — 1 балл.

Обосновано, что надпись на двери 34 ложна — 2 балл.

Баллы по двум предыдущим критериям суммируются.

Только приведен пример, что за дверью №34 все машины — 2 балла (то есть не обосновано, что нет других вариантов, кроме приведённого).

► **5-3.** Есть 100 рядов, в каждом ряду по две скамейки (см. рисунок). На скамейках сидят люди, максимум 4 человека на скамейке. Оказалось, что в каждом ряду сидит 3, 5 или 7 человек. Вася посчитал количество скамеек, на которых сидят 1 или 3 человека. Сколько таких скамеек мог насчить Вася? Укажите все возможные значения и докажите, что других нет.



✎ **Ответ.** 100.

✎ **Решение.** Заметим, что в каждом ряду может сидеть 0+3, 1+2, 2+3, 1+4 или 3+4 человека. То есть в каждом ряду есть ровно одна посчитанная скамейка. Значит, всего Вася насчитал 100 скамеек — ровно по одной в каждом ряду.

Критерии проверки.

► **5-4.** Имеется 10 шаров, из них ровно 2 радиоактивных. В тестер можно класть 1 или 2 шара, и он пикнет ровно в том случае, когда среди этих шаров есть хотя бы один радиактивный. Как за 5 использования тестера найти хотя бы один радиоактивный шар?

✎ **Решение.** Первыми тремя испольхованиями проверим по 2 различных шара (то есть всего 6 шаров).

1) Если хоть один раз тестер пикнул. Это означает, что мы нашли два шара, среди которых есть хоть один радиоактивный. Кладем любой из них в тестер. Если он пикнул, то мы нашли радиативный шар, а если нет, то второй шар из пары радиоактивный. Нам хваило даже четырёх использований тестера.

2) Тестер ни разу не пикнул. Это означает, что среди оставшихся шаров 2 радиактивных. Положим в тестер дважды по одному шару. Если тестер хоть раз пикнул, то мы нашли радиактивный шар. Если ни разу не пикнул, то два оставшихся шара радиоактивны.

Критерии проверки. Алгоритм не работает хотя бы в одном случае — 0 баллов.

► **5-5.** На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды 100 островитян сели за круглый стол лицом к центру стола и каждый сказал про своего соседа слева: «Он — рыцарь!» или «Он — жадный». Известно, что за этим столом сидит ровно один жадный. Докажите, что есть рыцарь и лжец, сидящие напротив друг друга.

✎ **Решение.** Так как есть и рыцари и лжецы, то есть какой-то рыцарь, слева от которого сидит лжец. Тогда этот лжец обязательно жадный, поскольку рыцарь не мог соврать. Поскольку жадный только один, то есть только один рыцарь, слева от которого лжец. Значит, все рыцари сидят подряд и все лжецы сидят подряд.

Пусть напротив каждого рыцаря сидит рыцарь, а напротив каждого лжеца — лжец. Тогда рассмотрим переход с лжеца на рыцаря. Тогда и напротив будет переход с лжеца на рыцаря. Но тогда неверно, что лжецы (или рыцари) сидят подряд.

Критерии проверки. Доказано только, что если справа от рыцаря лжец, то этот лжец жадный — 1 балл.

Доказано только, что рыцари сидят подряд, и лжецы сидят подряд — 5 балла. Эти 5 баллов не сумммируются с предыдыущим 1 баллом.

Завершение доказательства (то есть из условия «все рыцари сидят подряд и все лжецы сидят подряд» выводится решение задачи) — оценивается из 2-х баллов.

► **5-6.** Вася написал в каждую клеточку таблицы 3×3 по натуральному числу, среди этих чисел нет одинаковых. Маша заметила, что можно так вычеркнуть в каждой строке по одному числу, что сумма двух оставшихся чисел в каждой строке равна одному и тому же числу a. Таня заметила, что можно так вычеркнуть в каждом столбце по одному числу, что сумма двух оставшихся чисел в каждом столбце равна одному и тому же числу b. Может ли быть $a = b$?

✎ **Ответ.** Нет.

✎ **Решение.** Маша и Таня вычеркивают вместе не более 6 чисел. Значит, есть число x, которое ни Таня, ни Маша не вычеркивают. Рассмотрим строку и столбец с этим числом. Тогда оставшееся после вычеркивания число в строке равно $a - x$, а оставшееся после вычеркивания в столбце число равно $b - x$. Если предположить, что $a = b$, то тогда $a - x = b - x$, то есть в таблице есть одинаковые числа, что противоречит условию.

Критерии проверки. Только верный ответ — 0 баллов.

V олимпиада школьников по математике «Алые Паруса»
2023/2024 учебный год • Муниципальный этап • Ульяновская область

6 класс, решения и критерии проверки

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 3 часа)

► **6-1.** Вася и 5 его друзей 5 дней грызли семечки. Каждый день Вася сгрыз семечек больше, чем 4 его друга. Могло ли случиться так, что за все 5 дней Вася сгрыз семечек меньше, чем каждый из его друзей?

✎ **Ответ.** Могло.

✎ **Решение.** Есть много примеров. Один из них. В 1 день Вася сгрызает 2 семечки, первый друг 1000 семечек, остальные друзья — 1 семечку. Во 2 день Вася сгрызает 2 семечки, второй друг 1000 семечек, остальные друзья — 1 семечку. И так далее.

Тогда всего Вася сгрыз 10 семечек, а каждый из друзей по 1004 семечки.

Критерии проверки. Только верный ответ — 0 баллов.

Конкретный верный пример, как такое могло быть (с обоснованием или без обоносвания) — 7 баллов.

Заметим, что конкретный пример может описываться по разному. Например, везде, где в решении выше написано 1000, может быть написано «много, очень много» и т.п.

В верном примере есть ошибки в вычислениях: снимается 2 балла.

► **6-2.** В ток-шоу «Найди машину» имеется 100 закрытых дверей, за которыми суммарно расположены 15 машин (возможно, по несколько машин за одной дверью). На каждой двери написано «За какой-то из остальных дверей есть машина». Известно, что среди надписей точно есть ложные. Ведущий (честно!) подсказывает: «За дверью 34 есть машина!». Можно ли теперь про каждую из дверей выяснить, сколько за ней машин?

✎ **Ответ.** Да, можно.

✎ **Решение.** Заметим, что все надписи, кроме надписи на двери с номером 34 — правдивы (ведь за дверью 34 действительно есть машина). Значит, ложное утверждение именно на двери 34. Значит, за всеми дверьми, кроме 34, нет машин. То есть все 15 машин за дверью 34.

Критерии проверки. Обосновано, что надпись на всех дверях, кроме двери 34, правдивы — 1 балл.

Обосновано, что надпись на двери 34 ложна — 2 балл.

Баллы по двум предыдущим критериям суммируются.

Только приведен пример, что за дверью №34 все машины — 2 балла (то есть не обосновано, что нет других вариантов, кроме приведённого).

► **6-3.** Имеется 10 шаров, из них ровно 2 радиоактивных. В тестер можно класть 1 или 2 шара, и он пикнет ровно в том случае, когда среди этих шаров есть хотя бы один радиактивный. Как за 5 использования тестера найти хотя бы один радиоактивный шар?

✎ **Решение.** Первыми тремя испольхованиями проверим по 2 различных шара (то есть всего 6 шаров).

1) Если хоть один раз тестер пикнул. Это означает, что мы нашли два шара, среди которых есть хоть один радиоактивный. Кладем любой из них в тестер. Если он пикнул, то мы нашли радиативный шар, а если нет, то второй шар из пары радиоактивный. Нам хваило даже четырёх использований тестера.

2) Тестер ни разу не пикнул. Это означает, что среди оставшихся шаров 2 радиактивных. Положим в тестер дважды по одному шару. Если тестер хоть раз пикнул, то мы нашли радиактивный шар. Если ни разу не пикнул, то два оставшихся шара радиоактивны.

Критерии проверки. Алгоритм не работает хотя бы в одном случае — 0 баллов.

► **6-4.** На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды 100 островитян сели за круглый стол лицом к центру стола и каждый сказал про своего соседа слева: «Он — рыцарь!» или «Он — жадный». Известно, что за этим столом сидит ровно один жадный. Докажите, что есть рыцарь и лжец, сидящие напротив друг друга.

✎ **Решение.** Так как есть и рыцари и лжецы, то есть какой-то рыцарь, слева от которого сидит лжец. Тогда этот лжец обязательно жадный, поскольку рыцарь не мог соврать. Поскольку жадный только один, то есть только один рыцарь, слева от которого лжец. Значит, все рыцари сидят подряд и все лжецы сидят подряд.

Пусть напротив каждого рыцаря сидит рыцарь, а напротив каждого лжеца — лжец. Тогда рассмотрим переход с лжеца на рыцаря. Тогда и напротив будет переход с лжеца на рыцаря. Но тогда неверно, что лжецы (или рыцари) сидят подряд.

Критерии проверки. Доказано только, что если справа от рыцаря лжец, то этот лжец жадный — 1 балл.

Доказано только, что рыцари сидят подряд, и лжецы сидят подряд — 5 балла. Эти 5 баллов не сумммируются с предыдыущим 1 баллом.

Завершение доказательства (то есть из условия «все рыцари сидят подряд и все лжецы сидят подряд» выводится решение задачи) — оценивается из 2-х баллов.

► **6-5.** Вася написал в каждую клеточку таблицы 3×3 по натуральному числу, среди этих чисел нет одинаковых. Маша заметила, что можно так вычеркнуть в каждой строке по одному числу, что сумма двух оставшихся чисел в каждой строке равна одному и тому же числу a. Таня заметила, что можно так вычеркнуть в каждом столбце по одному числу, что сумма двух оставшихся чисел в каждом столбце равна одному и тому же числу b. Может ли быть $a = b$?

✎ **Ответ.** Нет.

✎ **Решение.** Маша и Таня вычеркивают вместе не более 6 чисел. Значит, есть число x, которое ни Таня, ни Маша не вычеркивают. Рассмотрим строку и столбец с этим числом. Тогда оставшееся после вычеркивания число в строке равно $a - x$, а оставшееся после вычеркивания в столбце число равно $b - x$. Если предположить, что $a = b$, то тогда $a - x = b - x$, то есть в таблице есть одинаковые числа, что противоречит условию.

Критерии проверки. Только верный ответ — 0 баллов.

► **6-6.** Натуральное число назовём *прикольным*, если оно удовлетворяет следующему свойству: если справа к числу приписать любую ненулевую цифру, получившееся число будет делиться на эту цифру. Сколько всего существует четырёхзначных прикольных чисел?

✎ **Ответ.** 36.

✎ **Решение.** Если к прикольному числу n приписать справа цифру k, то получим число $10n + k$, которое должно делиться на k. Значит, число $10n$ должно делиться на НОД всех однозначных чисел, то есть на $5\cdot7\cdot8\cdot9$. Это равносильно тому, что n делится на $7 \cdot 4 \cdot 9 = 252$. Первое четырехзначное число, делящееся на 252 — это $252 \cdot 4 = 1008$, последнее — $252 \cdot 39 = 9828$, поэтому четырёхзначных прикольных чисел — $39 - 3 = 36$.

Критерии проверки. Доказано, что $10n$ делится на 1, 2, …, 9 — 1 балл.

Доказано, что $10n$ делится на НОК(1, 2, …, 9) — ещё 1 балл.

Доказано, что n делится на 252 — ещё 2 балла.

Итого, если доказано, что прикольные числа — это в точности числа, делящиеся на 252 — 4 балла.

Из оставшихся 3-х баллов оценивается подсчет 4значных чисел, делящихся на 252. Если ошибка на ±1 — ставится 1 балл из этих 3-х. Если ошибка более чем на ±1 — ставится 0 баллов из этих 3-х.